

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记4——全微分与链式法则

全微分

《数学笔记11——微分和不定积分》中说明了什么是一元函数的微分，类似地，在多元函数中同样存在微分的概念，它有一个确切的名字——全微分。

《多变量微积分笔记1——偏导数》中，曾经提到过近似，对于 $f = f(x, y, z)$ 的微小改变 Δf ，是对其所有变量的微小扰动的总量：

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$$

当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ 时，约等于就变成了等于：

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

这就是全微分，全微分包括所有能改变函数值的因素。

链式法则

对于 $f = f(x, y, z)$ ， $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ， $z = z(t)$ ，也就是xyz都是关于t的函数（可参考《线性代数笔记6——直线和参数方程》）。如果将t看作时间，此时 Δf 可以看作是在微小时间 Δt 变化后产生的影响：

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z}{\Delta t} = f_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

when $\Delta t \rightarrow 0, \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt}, \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$$

这就是链式法则的内容。

也可以从微分的角度得出链式法则：

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = f_x x'(t)dt + f_y y'(t)dt + f_z z'(t)dt$$

示例

$w = x^2y + z, x = t, y = e^t, z = \sin t$ ，求w的全微分

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (2xy)(1) + (x^2)(e^t) + (1)(cost) \\ &= 2te^t + t^2e^t + cost \\ dw &= (2te^t + t^2e^t + cost)dt\end{aligned}$$

上面是根据链式法则的计算，如果直接把xyz代入w，w就变成了t的函数，对w直接求导：

$$\begin{aligned}w &= x^2y + z = t^2e^t + sint \\ \frac{dw}{dt} &= (t^2)'e^t + t^2(e^t)' + sin't = 2te^t + t^2e^t + cost\end{aligned}$$

和链式法则得到了相同的结果，这说明链式法则和直接代入是一样的。但如果x(t),y(t),z(t)很复杂，不能写成t的显函数，仅知道他们的偏导，那就只能使用链式法则了。

证明导数的乘法法则

导数的乘法法则是这样描述的： $(uv)' = u'v + uv'$ ，可以用链式法则加以证明。

令 $f = uv, u = u(t), v = v(t)$

$$\frac{df}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} = v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} = vu' + uv'$$

证明导数的除法法则

用链式法则证明导数的除法法则： $u/v = (u'v - uv')/v^2$

令 $f = u/v, u = u(t), v = v(t)$

$$\frac{df}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \frac{du}{dt} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dt} = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

对多变量使用链式法则

在极坐标中， $x = x(u, v), y = y(u, v)$ ，退化直角坐标后 $f = f(x, y)$ ，如何求f的全微分？这与之前不同，将x,y代入f后仍有两个变量，这需要连续使用链式法则：

$$\begin{aligned}df &= f_x dx + f_y dy \\ &= f_x(x_u du + x_v dv) + f_y(y_u du + y_v dv) \\ &= (f_x x_u + f_y y_u) du + (f_x x_v + f_y y_v) dv \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial u}} du + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial v}} dv\end{aligned}$$

x和y的微小改变导致了f的改变，而u和v的微小改变有导致了x和y的改变，这样传递的结果就变成了u和v的微小改变有导致了f的改变。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(A_t)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

需要注意的是最终结果中的偏导：

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

对于偏导，不能像导数一样使用约分，即：

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \neq \frac{\partial f}{\partial u}$$

也就是说d可以消元，δ则不行。

综合示例

示例1

$f = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求df

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &= (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) dr + (-f_x \sin \theta + f_y \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

示例2

$z = x^2 + y^2$, $x = u^2 - v^2$, $y = uv$, 求z的全微分

解法一，使用链式法则：

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv \\ &= (2x2u + 2yv) du + (2x(-2v) + 2yu) dv \\ &= (4xu + 2yv) du + (-4xv + 2yu) dv \\ &= (4u^3 - 4v^2u + 2uv^2) du + (-4u^2v + 4v^3 + 2u^2v) dv \\ &= (4u^3 - 2v^2u) du + (4v^3 - 2u^2v) dv \end{aligned}$$

解法二，直接代入：

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (uv)^2 = u^4 - u^2v^2 + v^4 \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial (u^4 - u^2v^2 + v^4)}{\partial u} du + \frac{\partial (u^4 - u^2v^2 + v^4)}{\partial v} dv \\ &= (4u^3 - 2uv^2) du + (-2u^2v + 4v^3) dv \end{aligned}$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 全微分, 链式法则

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

2

推荐

0

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记3——二元函数的极值

» 下一篇: 多变量微积分笔记5——梯度与方向导数

posted on 2018-01-25 14:17

我是8位的

阅读(6521)

评论(1)

编辑

收藏

举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinalUI Core

12,000

800

900

9 位

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

- 编辑推荐:
- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
 - 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
 - ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
 - .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
 - 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月6日-3月18日

最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes